

複素対称行列の対角化

2020年4月20日

主に Wikipedia [1] を見ながらネット上にあったやりとり [2, 3] を参考にした。何度も [4] について言及されていた (未確認)。

複素対称行列 M (${}^tM = M$) の対角化を考える。 $H = MM^\dagger (= MM^*)$ ¹⁾ とおくと、これは定義上エルミート行列なので適当なユニタリ行列 V ($V^\dagger V = VV^\dagger = I$) を用いて

$$V^\dagger H V = D_H \quad (1)$$

のように対角化出来る。ただし D_H は実かつ非負²⁾ の対角行列である。この対角化は複素数上において素直に複素内積を入れることで計算される。

この対角化の式は恒等的に

$$D_H = V^\dagger M^t \underbrace{(V V^\dagger)}_{= I} M^\dagger V = (V^\dagger M^t V^\dagger) ({}^t V M^\dagger V) = (V^\dagger M^t V^\dagger) (V^\dagger M^t V^\dagger)^\dagger \quad (2)$$

のように変形できる。したがって

$$N = V^\dagger M^t V^\dagger \quad (3)$$

とおいてやると

$$D_H = N N^\dagger \quad (4)$$

と略記される。 D_H は実かつ非負な対角行列なので素朴にルートを取ることが出来、それを $D_H^{1/2}$ と表わしておく。ここで注意すべきは、適当な対角なユニタリ行列を T と表わしておく³⁾、対角行列を

$$D_H = (D_H^{1/2} T) (D_H^{1/2} T)^\dagger \quad (5)$$

1) グラム行列

2) 任意の要素 x に対して $x^\dagger H x = \|M^\dagger x\|^2 \geq 0$ より H は半正定値。 $\|\cdot\|$ はノルムを表わしており、たとえば H のノルムは $\|H\| = \sqrt{\text{tr}[HH^\dagger]}$ で与えられる。

3) 対角行列どうしの積は可換

のように分解できるからと言って必ずしも

$$D_H^{1/2}T = V^\dagger M {}^tV^\dagger \quad (6)$$

が成立するとは言えないことである。

N は ${}^tN = V^\dagger M {}^tV^\dagger = N$ で確認できるように対称行列である。ここで $N = X + iY$ のように実対称行列 X, Y を導入して実部と虚部とに分解しておく

$$D_H = NN^\dagger = X^2 + Y^2 - i(XY - YX) \quad (7)$$

と書ける。左辺が実対角行列であることから N の実部と虚部とは可換 ($XY = YX$) であることが導かれる。ゆえに適当な実直交行列 W が存在して、 X, Y をそれぞれ

$${}^tWXW = D_X, \quad {}^tWYW = D_Y. \quad (8)$$

のように D_X, D_Y に実対角化できる。この対角化は実数上において実内積を入れた時の計算で求まる。つまり複素対称行列の時と違い、複素数上で複素内積を入れたものとして素直に計算すればそのまま求まる。したがって

$${}^tWNW = D_X + iD_Y = D_H^{1/2}P_M \quad (9)$$

となる。 N のノルムが M のノルムと同じであり、またそれは H のノルムのルートを取ったものと同じだから、ノルムの大きさを示す部分は $D_H^{1/2}$ であり、 P_M はノルムが 1 で位相のみを表わす対角ユニタリ行列である。

以上をまとめると複素対称行列 M は

$$U = {}^tWV^\dagger \quad (10)$$

を用いて

$$UM {}^tU = D_H^{1/2}P_M \quad (11)$$

のように対角化される。 U は

$$U^\dagger U = VW {}^tWV^\dagger = I \quad (12)$$

を満たすのでユニタリ行列である⁴⁾。複素対称行列は適当なユニタリ行列とその転置とで挟むことで複素対角化される。

参考文献

[1] [Wikipedia/Symmetric matrix/Complex symmetric matrices](#),

4) ${}^tUU = (V {}^tV)^*$

[Wikipedia/対称行列/スペクトル論](#)

- [2] [What condition gives a complex symmetric matrix diagonalizable?](#)
- [3] [Diagonalizing a Complex Symmetric Matrix](#)
- [4] R. A. Horn, C. R. Johnson, "*Matrix Analysis*", Cambridge University Press.