微分演算子

2019 年 12 月 14 日

目次

Exponential of powers of the derivative operator の計算ノート。関連事項として Weierstrass transform と Linear canonical transformation。

1 並進演算子

$\mathbb{R}$ 上の解析函数 f を $x=a$ 近傍で Taylor 展開すると

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=a}(x-a)^n \tag{1}$$

である。$x=a+b$ とすると

$$\begin{aligned} f(a+b) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=a} b^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x)\bigg|_{x=a} \\ &= \exp\left[b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] f(x)\bigg|_{x=a} \end{aligned} \tag{2}$$

と計算できる。$f(a+b)=f(x+b)|_{x=a}$ として、a は任意の値を選べるので

$$f(x+b)=\exp\left[b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] f(x), \tag{3}$$

つまり $\exp\left[b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]$ は並進演算子として作用する。

2　スケール演算子

x での微分演算子を ∂_x と書くことにする。$\mathbb{R}$ 上の解析函数 f と適当な実数 a において

$$f(ax) = f\left(e^{\ln a + \ln x}\right). \tag{4}$$

ここで $y = \ln x$ と置き換えて $g(x) = f\left(e^x\right)$ なる函数 g を考えると

$$g\left(\ln a + y\right) = \exp\left[\ln a\, \partial_y\right] g\left(y\right) = a^{\partial_y} g(y) \tag{5}$$

と計算できる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e^y} = e^y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e^y} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{6}$$

より

$$f(ax) = a^{x\partial_x} f(x) \tag{7}$$

が得られる。したがって $a^{x\partial_x}$ はスケール演算子として作用する。

3　冪乗演算子

適当な実数 a に対して

$$f\left(x^a\right) = f\left(e^{a \ln x}\right) \tag{8}$$

と書ける。スケール演算子での議論と同じように $g(x) = f\left(e^x\right)$ を満たす解析函数 g と置き換え $y = \ln x$ を用いると

$$f\left(x^a\right) = g\left(ay\right) = a^{y\partial_y} g(y) \tag{9}$$

となる。したがって

$$f\left(x^a\right) = a^{x \ln x\, \partial_x} f(x) \tag{10}$$

が得られる。

4　一般的な演算子

並進演算子やスケール演算子を拡張したものとして、解析函数 f と g に対して

$$Gf(x) = f\left(g(x)\right) \tag{11}$$

を満たすような演算子 G を調べる。

ここでは適当な解析函数 h を用いて

$$e^{\partial_{h(x)}} f\left(x\right) = e^{\partial_{h(x)}} f\left(h^{-1}\left(h(x)\right)\right) = e^{\partial_y} f\left(h^{-1}\left(y\right)\right) \tag{12}$$

の形で書ける G を考える。途中で $y = h^{-1}(x)$ とした。$\partial_{h(x)}$ は陽に書けば

$$\partial_{h(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h(x)} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} = \left.\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

である。右辺の項は引数 y の合成函数 $f \circ h^{-1}$ と見れば

$$e^{\partial_{h(x)}} f\left(x\right) = f\left(h^{-1}\left(y+1\right)\right) = f\left(h^{-1}\left(h\left(x\right)+1\right)\right) \tag{14}$$

となることがわかる。したがって与えられた函数 g に対して

$$h^{-1}\left(h\left(x\right)+1\right) = g(x) \tag{15}$$

を満たす函数 h が求まれば演算子 $G = \exp\left[\partial_{h(x)}\right]$ が定まる。この「定まる」は函数 h が存在することが確認されることで演算子 G が定義されることを意味する。式 (15) は函数に対する方程式なので、与えられた g に対して函数 h を求めるのは一般に難しい。逆に言うと函数 h を与えてしまえば演算子 G が作用された函数は引数が方程式 (15) の解として得られる函数 g の形になる。

以下これまでに計算した演算子に対応する函数 h を確認する。直接方程式 (15) を解くのは難しいので、方針としてはこれまでの計算で得られた演算子の形から推測して求める。並進変換 $g(x) = x + a$ の解は

$$a\partial_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(x/a\right)} \tag{16}$$

と変形できるから

$$h(x) = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h^{-1}(x) = ax \tag{17}$$

で与えられることが確認できる。函数 h の形を見ると並進 a が非ゼロで函数 h の引数が実数であれば問題なく定義できる。

またスケール変換 $g(x) = ax$ の解は、計算の途中で底が変更されていることに注意して、変更される前に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(\ln x/\ln a\right)} \tag{18}$$

を経ていることから

$$h(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \Leftrightarrow \quad h^{-1}(x) = a^x \tag{19}$$

で与えられることが確認できる。スケール a と函数 h の引数がともに非負実数であればとりあえず問題なくスケール演算子を定義できる。

冪乗変換 $g(x) = x^a$ はスケール変換と同じく底の変更も経ていることに注意すると

$$\ln a\, x \ln x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \ln a\ \ln x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln x} = \ln a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln(\ln x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(\ln(\ln x)\,/\ln a\right)} \tag{20}$$

と変形できるので

$$h(x) = \frac{\ln(\ln x)}{\ln a} \quad \Leftrightarrow \quad h^{-1}(x) = e^{e^{\ln a\, x}} \tag{21}$$

が解として得られる[1)]。函数の引数は 1 より大きい実数、冪を指定する a は非負実数であれば問題なく定義できる。

1） 微分の計算は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln x} = \left.\frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\ln x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\ln x} = \left.\frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\ln\ln x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \ln x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln x}.$$